Solución de la ecuación algebraica de Riccati

María Aracelia Alcorta-García*
ORCID: 0000-0002-9079-27

Juan Carlos Hernández-Medellín*
ORCID: 0000-0002-5191-9514

https://doi.org/10.29105/cienciauanl27.127-5

RESUMEN

En este trabajo se obtiene un conjunto de soluciones para la ecuación algebraica de Riccati (ARE), la cual es expresada en términos de los coeficientes de la ecuación original sin necesidad de conocer una de las soluciones para, a partir de ésta, obtener la segunda, como se hace en el caso de la ecuación de Bernoulli. Las soluciones son obtenidas partiendo de una matriz simétrica *S* por bloques, formada con los coeficientes de la ARE. Las soluciones de la ARE son obtenidas partiendo del cálculo de los valores propios de *S* y aplicando los principios de ortogonalidad en una base de un módulo sobre el anillo R_{nxn}. Este procedimiento supone condiciones de simetría en los coeficientes de la ARE y se considera que la diagonalización de la matriz por bloques *S* siempre es posible. La metodología propuesta se muestra en dos ejemplos.

Palabras clave: ecuación algebraica de Riccati, matriz por bloques, valores propios, vectores propios, diagonalización.

ABSTRACT

In this work, a set of solutions for the algebraic Riccati equation (ARE) is obtained, which is expressed in terms of the coefficients of the original equation without the need to know one of the solutions in order to obtain the second one, as it is done in the case or fthe Bernoulli equation. The solutions are obtained starting from a symmetric matrix S, by blocks, formed with the coefficients of the ARE. The solutions of the ARE are obtained by calculating the eigenvalues of S and applying the principles of orthogonality on the basis of a module over the ringR_(nxn). This procedure assumes symmetry conditions in the coefficients fo the ARE, and it is considered that the diagonalization of the block matrix S is always possible. Two examples are presented illustrating the proposed methodology.

Keywords: Algebraic Riccati equation, block matrix, eigenvalues, eigenvectors, diagonalization

La ecuación diferencial ordinaria dada por

$$\frac{dy}{dx}=Py^2+Q+R,$$

donde *P, Q* y *R* son matrices cuyos elementos pueden ser funciones de *x* (o constantes), es llamada ecuación diferencial ordinaria de Riccati (EDOR), en honor al matemático italiano Jacopo Francesco Riccati, nacido en Venecia, República de Venecia, el 28 de mayo de 1676, y falleció en Treviso, Italia, el 15 de abril de 1754.

J.F. Riccati llegó a esta ecuación al analizar la hidrodinámica. En 1724 publicó una investigación multilateral de la ecuación, llamada, por iniciativa de D'Alembert (1769): Ecuación de Riccati. Algunos contemporáneos la analizaron, entre ellos Gottfried Wilhelm von Leibniz, matemático y filósofo alemán; Christian Goldbach, matemático originario de Kaliningrado, Rusia; Johann Bernoulli, matemático, médico y filólogo suizo, y sus hijos Nicolás y Daniel Bernoulli y, posteriormente, el matemático y físico suizo Leonhard Euler. Su trabajo se limitó al análisis de casos particulares de la ecuación.

*Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás delos Garza, México.
Contacto: maria.alcortagr@uanl.edu.mx

Siendo ésta planteada y analizada en la forma que conocemos en los libros de texto (Dennis, 2012; Boyce, 2012) por la familia Bernoulli.

En algunas de las investigaciones se planteó la ecuación especial de Riccati, que sí posee solución en términos finitos en un número limitado de casos, para lo cual se requiere conocer una de las soluciones. Algunos trabajos han presentado soluciones de la ARE (Zoran, 2017), los autores usan un método recursivo de reducción de orden. Ai-Guo Wu, Hui-Jie Sun y Ying Zhang (2020) plantean la solución utilizando dos métodos de iteraciones.

La solución con restricciones más específicas, cuando se trata de un sistema hermitiano estabilizable, se puede ver en Zhang *et al.* (2024). La solución de la ecuación de Riccati no simétrica es planteada por Akbar Shirilord y Mehdi Dehghan (2022). La ecuación de Riccati parametrizada es presentada en Rojas (2021). Nguyen y Gajic (2010) presentan una solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati, en este trabajo los autores emplean la solución definida antiestabilizante de la ARE y la solución de la ecuación diferencial matricial de Lyapunov. Hench *et al.* (1998) resuelven una ARE amortiguada y una ecuación degenerada de Riccati obtenida partiendo del problema de los controladores amortiguados.

Carpanese (2000) obtiene una solución de la ecuación en diferencias de Riccati (caso discreto). Adam (2000) verifica la continuidad de la solución de la ecuación diferencial de Riccati (EDR) y la ARE en el caso continuo en el tiempo. Un algoritmo para la solución de sistemas no triviales acoplados de ARE que aparecen en el problema de control Risk-sensitive es presentado por Freiling, Lee y Jank (1998), quienes usan métodos de comparación al obtener condiciones adecuadas de acotación en las soluciones de un problema de valor terminal en los sistemas de EDR acoplados.

Barabanov y Ortega (2004) presentan extensiones ocultas del lema Kalman-Yakubovich-Popov, referente a las condiciones de la solución en la matriz Lur'e-Riccati. Con Jiménez (2015) la EDR se resuelve en una ecuación diferencial de segundo orden, reduciéndola a una ecuación de Riccati, siempre y cuando los coeficientes en la ecuación diferencial estén relacionados de una forma específica, resolviendo posteriormente la ecuación de Riccati sin requerir el conocimiento de una de las soluciones. Una aproximación eficiente en la resolución de la EDR usando derivadas de orden fraccional se presenta en Alam, Ara y Jamil (2011). Cai, Ding y Li (2017) presentan una aplicación de la ecuación de Riccati en el problema de estimación. La continuidad de la solución de la ecuación de Riccati es presentada por Adam (2000).

El objetivo de este trabajo es establecer una metodología que facilite la obtención de la solución de la ARE, sin necesidad de conocer una de las soluciones, considerando los puntos de equilibrio propios del sistema.

Por otro lado, como una aplicación importante, por su participación en el problema de control (donde toma el rol de ecuación de ganancia del control) y programación dinámica (así se puede ver en Reid (1972), Petkov y Konstantinov (1991), Nguyen y Gajic (2010), entre otras publicaciones), retoma importancia el cálculo de los puntos de equilibrio de la misma y su solución, encontrándola asintóticamente estable en los puntos de equilibrio de la misma, logrando así un control eficiente.

Entre las propiedades de la EDOR que facilitan la existencia y obtención de las ecuaciones de control se encuentran la existencia de solución única para condiciones iniciales dadas y condicionando a que la EDOR sea definida positiva se llega al ajuste de la ecuación de control. El trabajo es organizado en la siguiente forma: sección 2 se presenta el planteamiento del problema, en la sección 3 se encuentra la solución de la ARE, y en la sección 4 se presentan dos ejemplos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La EDR matricial en tiempo continuo, con solución $X(t)\epsilon R_{(n\times n)}$, está dada por

$$\dot{X}(t)=X^T(t)AX(t)+X^T(t)B+B^TX(t)+C,\ X(0)=X_0, \quad (1)$$

donde $A,\ B,\ C\epsilon R_{n\times n}$ son matrices invariantes en el tiempo, A y C son matrices simétricas. Los puntos de equilibrio para la EDR (1), son las soluciones de la ARE, que toma la forma:

$$X^T(t)AX(t)+X^T(t)B+B^TX(t)+C=0, \quad (2)$$

donde $0\epsilon R_{n\times n}$.

Partiendo de la ARE (2), se forma la matriz a bloques simétrica (Jiménez, 2015) de dimensión $2nX2n,\ S$:

$$S=\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$$

Entonces la ARE (2) se puede representar de la siguiente manera:

$$(X^T(t) I_n)\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^T(t) \\ I_n \end{pmatrix}=V^TSV=0\ .$$

Donde $V=\begin{pmatrix} X^T(t) \\ I_n \end{pmatrix}$, I_n es la matriz identidad $n\times n$.

Dado que S es simétrica, es diagonalizable ortogonalmente en R, esto implica que existe una matriz $Q\in R_{2n\times 2n}$ ortogonal y una matriz $D\in R_{2n\times 2n}$ diagonal tal que $S= QDQ^T$, como lo plantea Jiménez (2015). Las matrices Q y D pueden ser separadas en bloques tamaño $n\times n$ en la siguiente forma:

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} D_1 & 0_{nxn} \\ 0_{nxn} & D_2 \end{pmatrix}$$

Dado que D es diagonal, entonces D_1 y D_2 también lo son. Tomando en cuenta lo anterior es establecido el siguiente lema.

Lema 1

Sean $V_1=\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{pmatrix}$ y $V_2=\begin{pmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \end{pmatrix}$ tales que $Q=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$. Donde $V_1,\ V_2$ son matrices de dimensión $2n\times 2n$.

Entonces, las siguientes igualdades se cumplen

i. $V_1^TS\,V_1 = D_1$

ii. $V_2^TS\,V_2 = D_2$

iii. $V_2^TS\,V_2 = V_2^TS\,V_2 = 0_{nxn}$

Demosatración

Partiendo de la definición de V_1 y V_2, $Q = V_1\ V_2$.

De la diagonalización de $S, D = Q^TSQ$.

$$D=Q^TSQ=\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}S\,(V_1\ V_2)$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0_{nxn} \\ 0_{nxn} & D_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_1^TSV_1 & V_1^TSV_2 \\ V_2^TSV_1 & V_2^TSV_2 \end{pmatrix}$$

Entonces

Los resultados se obtienen de la igualdad de matrices anterior.■

El lema 1 establece una estructura para matrices de dimensión $2n{\times}n$ similar en los vectores conjugados en R^2. Los vectores conjugados en R^2 son linealmente independientes y además forman una base de R^2. Sin embargo, en esta estructura, la “independencia lineal” tiene además las características dadas por la estructura de módulo sobre un anillo, lo cual se explica en el lema 2.

Lema 2. Estructura de módulo

Sean V_1 y V_2 definidos como en el lema 1, éstos forman una base en R_{2nxn} en una especie de módulo derecho sobre el anillo de matrices R_{2nxn}.

Esto implica:

i. Para cada $V \in R_{2nxn}$, existen $K_1, K_2 \in R_{nxn}$ tales que $V_1 K_1 + V_2 K_2 = V$

ii. $V_1 K1 + V_2 K2 = 0_{2nxn}$, $K1 = K2 = 0nxn$

Demostración

i. Considere el producto

$$Q^T V = \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} V_1^T V \\ V_2^T V \end{pmatrix}$$

El cual siempre existe ya que Q es ortogonal.

$$V = Q(Q^T V) = (V_1 \;\; V_2)\begin{pmatrix} V_1^T V \\ V_2^T V \end{pmatrix}$$

$$V = V_1 V_1^T V + V_2 V_2^T V$$

Si $K_1 = V_1^T V$ y $K_2 = V_2^T V$, que siempre existe, se llega al resultado *i.*

ii. La demostración de la suficiencia es trivial. Al probar la necesidad, considere $V=0_{2nxn}$ y sustituyendo las expresiones para K_1 y K_2 de la demostración de la parte *i*, se llega a *ii.*■

Partiendo de lo planteado en el lema 2, toda matriz $2n{\times}n$ puede ser escrita como una combinación módulo de V_1 y V_2. Esta matriz incluye la solución matricial de la ARE (2).

SOLUCIÓN DE LA ARE

Además existen $K_1, K_2 \in R_{nxn}$ tales que

$$\begin{pmatrix} X \\ I_n \end{pmatrix} = V_1 K_1 + V_2 K_2 = Q\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (3), se obtiene:

$$0_n = (X^T I_n) S \begin{pmatrix} X \\ I_n \end{pmatrix}$$
$$= (V_1 K_1 + V_2 K_2)^T S (V_1 K_1 + V_2 K_2)$$

Haciendo las operaciones se llega a

$$K_1^T V_1^T S V_1 K_1 + K_1^T V_1^T S V_2 K_2 + K_2^T V_2^T S V_1 K_1 + K_2^T V_2^T S V_2 K_2 = 0_n$$

Usando el lema 1, la expresión anterior se simplifica a:

$$K_1^T D_1 K_1 + K_1^T D_2 K_2 = 0_n$$

Esta ecuación puede ser escrita como

$$+K_1^T D_2 K_2 = K_1^T(-D_2) K_1 \quad (5)$$

Para satisfacer esta ecuación, son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 1. Raíz cuadrada de una matriz simétrica

Dada una matriz simétrica $A \in R_{nxn}$, su raíz cuadrada es alguna matriz $B \in R_{nxn}$ tal que $B^T B = A$. Ésta es denotada por $B = \sqrt{A}$.

Definición 2. Raíz cuadrada principal

Dada una matriz diagonal $D = diag\{d_1,\ldots, d_n\} \in R_{nxn}$ con entradas no negativas, su raíz cuadrada principal es $diag\{\sqrt{d_1},\ldots, \sqrt{d_n}\}$, donde los elementos de su diagonal son la raíz cuadrada de los elementos de la matriz D.

Proposición 1

La raíz cuadrada de una matriz no es única. Si B es una raíz cuadrada de A, entonces UB, donde $U \in R_{nxn}$ es ortogonal, es además una raíz cuadrada de A.

Demostración

Dado que $U^T U = I_n B^T B = A$. Entonces $(UB)^T (UB) = B^{-T} U^T U B = B^T B = A$.■

Proposición 2

Sean $M, N \in R_{nxn}$ y N simétrica. Entonces $\sqrt{N}M$ es una raíz cuadrada de $M^T N M$.

Demostración

Aplicando la proposición 2 en (5), es posible escribir

$$(\sqrt{D_2} K_2)^T (\sqrt{D_2} K_2) = (-\sqrt{D_1} K_1)^T (\sqrt{D_1} K_1)$$

Aplicando raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación anterior, e introduciendo una matriz ortogonal $U \in R_{n{\times}n}$, se obtiene

$$(\sqrt{D_2} K_2) = U(-\sqrt{D_1} K_1) \quad (6)$$

Proposición 3

Si D es una matriz diagonal no singular, con entradas positivas, entonces $\sqrt{D}$ es también no singular y $\sqrt{D^{-1}} = \sqrt{D}^{-1}$.

Demostración

$D = diag\{d_1,\ldots, d_n\}$. Dado que D es invertible, $di > 0, \forall i = 1,\ldots,n$. Esto implica que $\sqrt{di} > 0 \; \forall i = 1,\ldots, n$, por lo tanto $\sqrt{D}$ es invertible.

Además

$$\sqrt{D}^{-1} = diag\left\{\sqrt{d_1},\ldots,\sqrt{d_n}\right\}^{-1}$$
$$= diag\left\{\sqrt{d_1}^{-1},\ldots,\sqrt{d_n}^{-1}\right\}/$$
$$= diag\left\{\sqrt{d_1^{-1}},\ldots,\sqrt{d_n^{-1}}\right\}$$
$$= \sqrt{diag\left\{\sqrt{d_1^{-1}},\ldots,\sqrt{d_n^{-1}}\right\}} = \sqrt{D^{-1}}.■$$

Hasta aquí es posible resolver para K_1 o K_2 en (6). Por otro lado, si D_2 es invertible, entonces

$$K_2 = \sqrt{D_2^{-1}}\, U \sqrt{-D_1 K_2}$$

Con lo cual

$$\begin{pmatrix} X \\ I_n \end{pmatrix} = V_1 K_1 + V_2 K_2$$
$$= \left(V_1 + V_2 \sqrt{D_2^{-1}}\, U \sqrt{-D_1}\right) K_1$$

Partiendo de las definiciones de V_1 y V_2 en el lema 1, sustituyendo los resultados anteriores, tenemos:

$$X=\left(Q_{11}+Q_{12}\sqrt{D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1}\right)K_1 \quad (7)$$
$$X=\left(Q_{21}+Q_{22}\sqrt{D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1}\right)K_1 \quad (8)$$

Si D_1 es invertible, entonces

$$K_1=\sqrt{D_1^{-1}}\,U\sqrt{-D_2}\,K_2,$$

donde U^T ha sido sustituida por U, ya que U es una matriz ortogonal arbitraria. Entonces

$$\begin{pmatrix} X \\ I_n \end{pmatrix}=V_1K_1+V_2K_2$$
$$=\left(V_1\sqrt{D_1^{-1}}\,U\sqrt{-D_2}+V_2\right)K_2$$

De donde se obtiene:

$$X=\left(Q_{11}\sqrt{-D_1^{-1}}\,U\sqrt{D_2}+Q_{12}\right)K_2 \quad (9)$$
$$I_n=\left(Q_{21}\sqrt{-D_1^{-1}}\,U\sqrt{D_2}+Q_{22}\right)K_2 \quad (10)$$

Para las ecuaciones (8) y (10) se tiene una solución en K_1 o K_2, esto es

$$K_1=Q_{21}+Q_{22}\sqrt{-D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1} \text{ ó}$$
$$K_2=Q_{21}\sqrt{-D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1}+Q_{22}.$$

Éstas deben de ser invertibles ya que son factores de un producto que genera la matriz identidad. Por lo que su determinante no puede ser cero. El resultado anterior nos permite enunciar el siguiente teorema que presenta la solución de la ARE.

Teorema 1. Soluciones de la ARE

Sea la ARE definida como previamente, y sean Q y D las matrices de dimensión $2n\times 2n$ de la descomposición en valores propios de la matriz coeficiente particionada en $n\times n$ bloques. Entonces las soluciones de la CARE, parametrizadas con una matriz ortogonal $U\in R_{n\times n}$ tienen la forma

$$X=\left(Q_{11}+Q_{12}\sqrt{D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1}\right)\left(Q_{21}+Q_{22}\sqrt{D_2^{-1}}\,U\sqrt{-D_1}\right)^{-1} \quad (11)$$

ó

$$X=\left(Q_{11}\sqrt{-D_1^{-1}}\,U\sqrt{D_2}+Q_{12}\right)\left(Q_{21}\sqrt{-D_1^{-1}}\,U\sqrt{D_2}+Q_{22}\right)^{-1} \quad (12)$$

Siempre y cuando sea posible calcular las matrices inversas en las expresiones anteriores.

Demostración

Sustituyendo las expresiones en K_1 y K_2 en las ecuaciones (7) y (9) se obtiene el resultado.■

EJEMPLOS

Ejemplo 1

A continuación se presentan dos ejemplos en los que se aplica la metodología presentada en la solución de la ARE (2). Tomando como coeficientes las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Para éstas, la matriz S toma la forma

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene la siguiente descomposición

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (11), y tomando la matriz ortogonal U como la matriz identidad I_2, se obtiene:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

una solución de la ecuación de Riccati asociada a las matrices en (13). La solución puede ser verificada al sustituir en (2) y ver que se satisface.

Similarmente, si se sustituye U=-I2, se obtiene:

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

que también es solución de la CARE (2).

Ejemplo 2

Sea dada la CARE (2), tomando como coeficientes las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para las cuales, la matriz S toma la forma

$$S=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ésta tiene la descomposición

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la ecuación (11) con $U=I_2$, se obtiene la solución:

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Note que, en este caso, la matriz D_1 no es invertible, por lo tanto la ecuación (12) no puede ser usada.

REFERENCIAS

Adam, C. (2000). Continuity of the solution of the Riccati equations for continuous time JLQP, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5), 934-937.

Alam, K.N., Ara, A., y Jamil, M. (2011). An efficient approach for solving the Riccati equation with fractional orders, in Elsevier (ed.), *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, 2683-2689.

Barabanov, N.E., y Ortega R. (2004). On the solvability of extended Riccati equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4), 598-602.

Boyce, W.E., DiPrima, R.C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons.

Cai, X., Ding, Y. S., y Li, S.Y. (2017). Convergent properties of Riccati equation with application to stability analysis of state estimation, *Hindawi Athematical Problems in Engineering*, 2017, 1-7.

Carpanese, N. (2000). Periodic Riccati difference equations: Approaching equilibria by implicit systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7), 1391-1396.

Dennis, G., y Wright, Zill. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons.

Freiling, G., Lee, S.R., y Jank, G. (1998). Coupled Matrix Riccati Equations in Minimal Cost Variance Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 4(3), 556-560.

Hench, J.J., He, C., Kvucera, V., *et al.* (1998). Coupled matrix Riccati equations in minimal cost variance control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3), 556-560.

Jiménez, J.A. (2015). La solución de algunas EDO de Riccati, *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 15(2).

Nguyen, T., y Gajic, Z. (2010). Solving the matrix differential Riccati equation: A Lyapunov equation approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1), 191-194. https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2033841

Petkov, P., Christov, N., y Konstantinov, M. (1991). *Computational Methods for Linear Control Systems, Prentice*, New York.

Rojas, A.J. (2021). Modified Algebraic Riccati Equation Closed-Form Stabilizing Solution, *IEEE Access*, 9, 140667-140675. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3119592.

Reid, W.T. (1972). *Riccati differential equations*, Academic Press.

Shirilord, Akbar, Dehghan, Mehdi, (2022). Closed-form solution of non-symmetric algebraic Riccati matrix equation, *Applied Mathematics Letters*, 131, https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108040

Wu, Ai-Guo, Sun, Hui-Jie, Zhang, Ying, (2020). A novel iterative algorithm for solving coupled Riccati equations, *Applied Mathematics and Computation*, 364, https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124645

Zhang, L., Chen, M.Z.Q., Gao, Z., *et al.* (2024). On the explicit Hermitian solutions of the continuous-time algebraic Riccati matrix equation for controllable systems, *IET Control Theory Appl*, 1-12, https://doi.org/10.1049/cth2.12618

Zoran, Gajic, Djordjija, Petkovski, Xuemin, Shen. (2017). *Singularly perturbed and weakly coupled linear control systems, a recursive approach, Technical report*, Springer Nature Switzerland AG.

Descarga aquí nuestra versión digital.

Recibido: 17/10/2022
Aceptado: 07/03/2024