



Conciencia

UN INFINITO M GRA

CONCIENCIA

Ángel Jareb Navarro Castillo*, José Ángel Andrade Armendáriz*

* Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, México.

Contacto: amaniel2718@protonmail.com

MÁS

INDE



Ilustraciones: cortesía del artista, Erick Rdz.

*Hay un concepto que es el corruptor
y el desatinador de los otros.
No hablo del mal cuyo
limitado imperio es la ética;
hablo del infinito.*

Jorge Luis Borges

Los números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ son posiblemente el primer acercamiento matemático que tenemos con el infinito. No importa qué número tomes, tan grande como te sea posible, si le sumas 1 tendrás un número todavía mayor. Sin embargo, ¿cómo podemos concebir al conjunto \mathbb{N} , si es imposible conocer cada uno de sus elementos?, ¿tiene sentido la existencia de algo infinito?

La realidad es que el infinito está presente en la mayor parte de las Matemáticas. Los números reales, las funciones continuas, la integral, la geometría, y casi todas las ramas de las Matemáticas requieren el uso de la noción de infinito.

Y como el infinito forma parte de las Matemáticas, y por el carácter preciso y formal que tienen éstas, requiere una definición de la misma naturaleza. Esto fue conseguido a finales del siglo XIX por el matemático Georg Cantor (1845-1918), quien desarrolló *la teoría de conjuntos*.

El objetivo de este artículo es presentar la concepción matemática del infinito, y una de sus consecuencias más interesantes y sorprendidas. Para este fin, explicaremos una simplificación de la teoría de conjuntos, poco precisa en beneficio de la accesibilidad. Para un estudio más formal y detallado puede consultar Hernández (1998); en ésta y otras fuentes como Hrbacek y Jech (1999) y Jech (2013), basamos las definiciones “intuitivas” que utilizaremos en este artículo.

TEORÍA DE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos que satisfacen una propiedad en común. Si p es esa propiedad, entonces denotamos al conjunto correspondiente como $\{x/p(x)\}^1$, donde $p(x)$ es la notación que utilizaremos para abreviar “ x satisface la propiedad p ”. Para decir que un objeto x pertenece a un conjunto X utilizamos la notación $x \in X$. Decimos que un conjunto A es subconjunto de (o está contenido en) otro conjunto B si todo elemento de A pertenece a B , y lo abreviamos con la notación $A \subset B$. Cabe aclarar que, cuando un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B , no se está descartando la posibilidad de que sean iguales ($A=B$); si quisiéramos aclarar que son distintos ($A \neq B$) escribiríamos $A \subsetneq B$ (A está contenido en B pero no es igual a él).

Informalmente, una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos, de tal forma que a cada elemento del primer conjunto le corresponde únicamente un elemento del segundo conjunto. Si f es una función que asigna elementos del conjunto A a elementos del conjunto B , decimos que f es una función que va de A a B o simplemente escribimos $f: A \rightarrow B$ (véase figura 1). Si $x \in A$, entonces denotamos como $f(x)$ al elemento en B correspondiente a x . Todo acerca de una función f que va de A a B se puede abreviar escribiendo

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

donde, en lugar de escribir $f(a)$, se suele escribir la descripción general de la asignación de cada elemento a .

¹ En realidad, no toda propiedad “formal” puede definir un conjunto. Por ejemplo, si existiese un conjunto de la forma $A = \{x/x \notin x\}$ llegaríamos a una contradicción (ζ se cumple $A \in A?$); a esto se le conoce como *la paradoja de Rusell*.

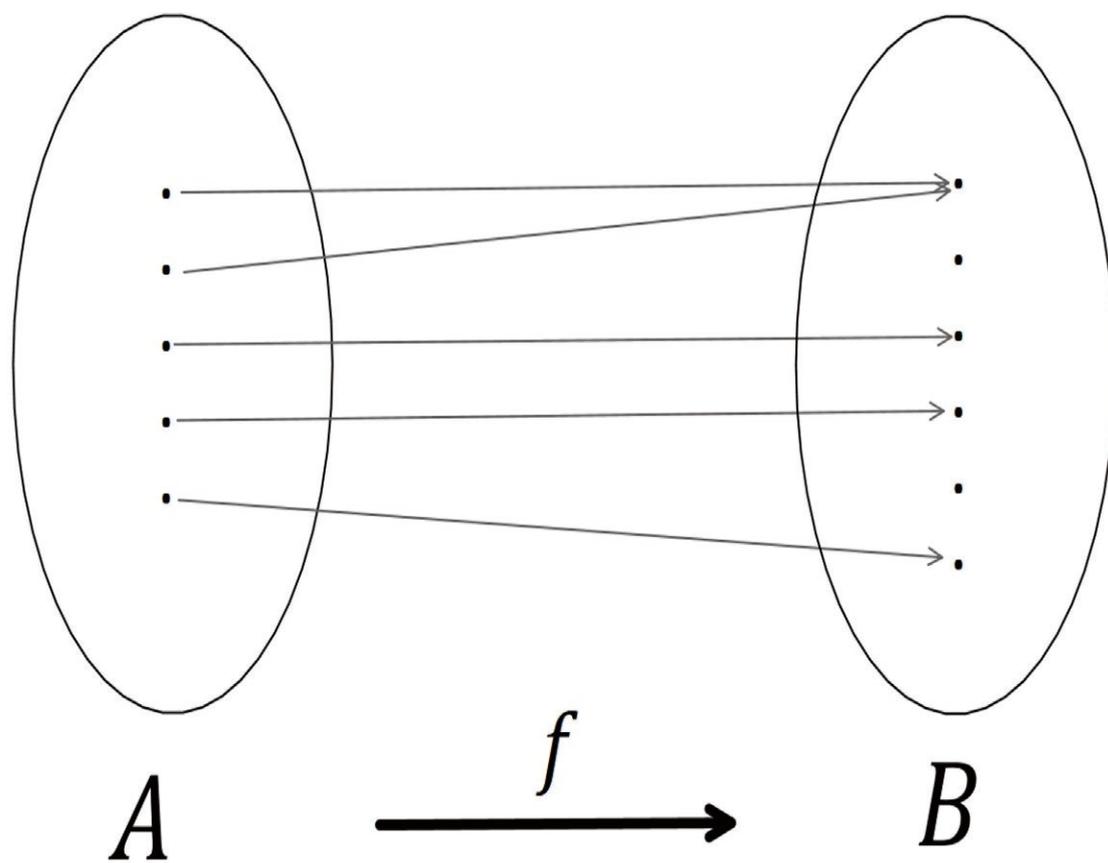


Figura 1. Ejemplo gráfico de función.



Decimos que una función $f:A\rightarrow B$ es biyectiva si a cada elemento del segundo conjunto le corresponde un único elemento del primer conjunto (véase figura 2).

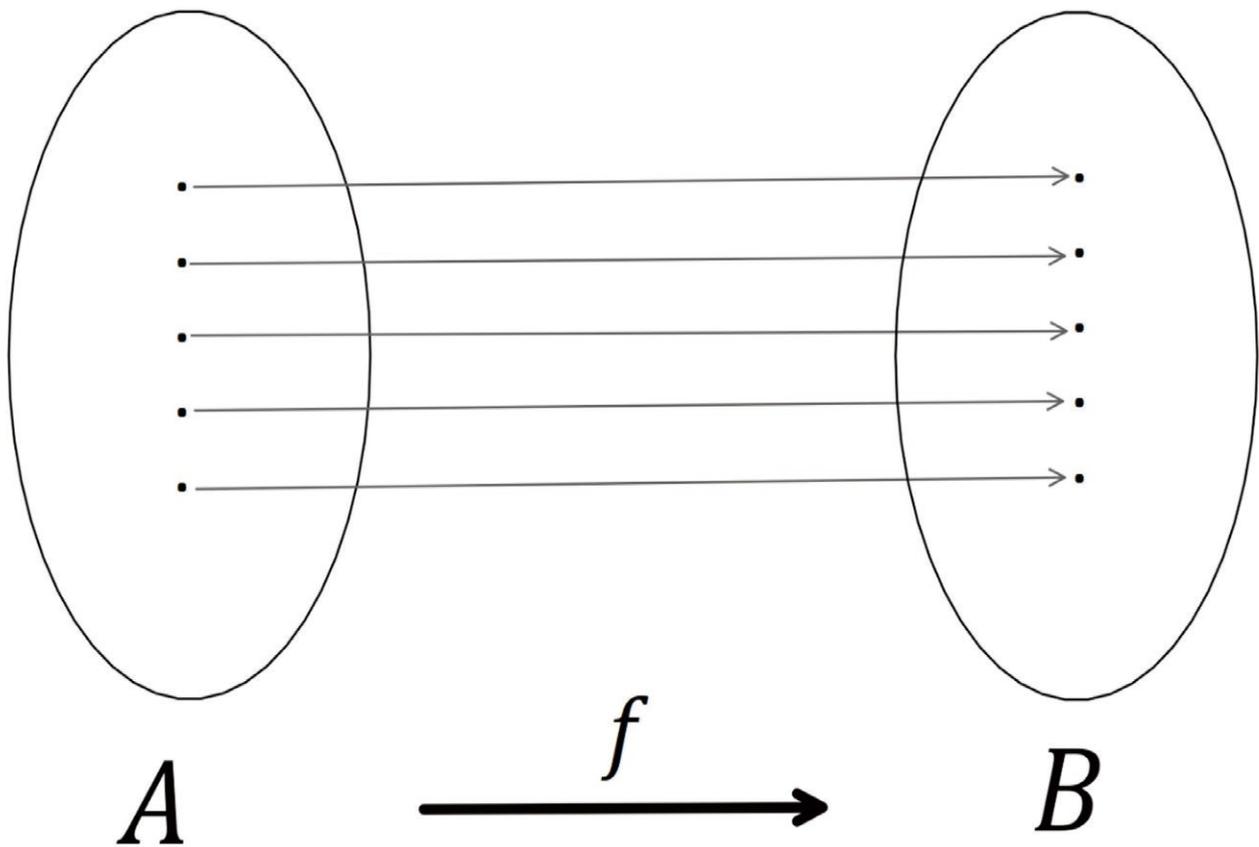


Figura 2. Ejemplo gráfico de función biyectiva.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Decimos que dos conjuntos A y B tienen el mismo tamaño si existe una función $f:A \rightarrow B$ biyectiva, y si A tiene el mismo tamaño que un conjunto $A_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, decimos que es A finito y tiene n elementos. Un conjunto es infinito si no es finito.

Por ejemplo, \mathbb{N} es infinito. Sin importar cómo le asignes elementos de A_n a \mathbb{N} , siempre van a faltar números por cubrir.

Cuando dos conjuntos A y B tienen el mismo tamaño, se suele decir que tienen la misma cardinalidad y se escribe $|A|=|B|$, donde $|A|$ denota el “número de elementos” que tiene el conjunto A , aunque su número de elementos sea “infinito”.

Ejemplos conocidos de conjuntos infinitos son los de números pares, primos, enteros, racionales y reales.

El conjunto de los números enteros consta de los números naturales y todos sus negativos; lo denotamos como $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. El conjunto de números racionales es el conjunto de aquellos números conocidos comúnmente como fracciones; lo denotamos como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}.$$

Números enteros como -2 se pueden expresar como números racionales mediante $-2/1$, por lo que todo número entero es racional.

El conjunto de números reales (denotado como \mathbb{R}) es un poco más difícil de definir. Nos sirve pensar en un número real como un arreglo infinito de números, donde el primer número es un número entero y el resto (los decimales) son números naturales entre el 0 y el 9. Números racionales como $1/3$ se pueden expresar dentro del conjunto de números reales como $0.33333\dots$, por lo que abreviamos simplemente escribiendo $1/3$. Un ejemplo famoso de número real que no es racional (en cuyo caso solemos llamarles números irracionales) es $\pi = 3.1415926535\dots$

Otra forma de describir un número real es mediante una suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, donde los números a_n son elementos de $\{0, 1, \dots, 9\}$, a excepción del primero (a_0), que puede ser cualquier número entero. Por ejemplo, $-20.12333\dots$ se puede escribir como:

$$-20 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} \dots$$

Los conjuntos \mathbb{Z}, \mathbb{Q} y \mathbb{R} son ejemplos de conjuntos infinitos. Cabe preguntarse, ¿son del mismo tamaño? La intuición nos puede decir dos cosas: por un lado, tenemos que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, por lo que parece razonable pensar que son conjuntos consecutivamente más grandes que el otro. Otra intuición nos dice que todos son infinitos y por lo tanto tienen el mismo tamaño, su tamaño es el “infinito”. Sin embargo, como veremos en las siguientes secciones, ambas suposiciones son erróneas.



CONJUNTOS NUMERABLES

Un conjunto es numerable si existe una función biyectiva entre éste y \mathbb{N} . La idea intuitiva de que un conjunto X sea numerable es pensar que sus elementos se pueden enlistar u ordenar, seleccionando un primer elemento, luego un segundo, un tercero y así sucesivamente. A pesar de que \mathbb{Z} y \mathbb{Q} son conjuntos que contienen a los naturales, resulta que son numerables, tienen el mismo tamaño que \mathbb{N} .

Para enlistar a los números enteros podemos escoger como primer elemento al cero, luego etiquetar a todos los naturales, cada uno seguido de su negativo (la lista resultante sería $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$) y, como podemos imaginar, se terminará enlistando a todos los enteros.

Puede sonar algo raro que los racionales sean numerables, ya que desde luego hay una cantidad infinita de racionales, pero, a diferencia de los números naturales y enteros, entre cualesquiera dos racionales hay una infinidad de ellos. Para exhibir la numerabilidad de los

racionales probaremos que el conjunto de racionales no negativos (denotamos a este conjunto como \mathbb{Q}^+) es numerable, ya que si \mathbb{Q}^+ es numerable, se pueden ordenar los racionales negativos usando el mismo argumento que utilizamos con los enteros (el proceso de alternación de signos). Empezaremos escribiendo todos los naturales, luego, debajo de éstos escribiremos los naturales divididos entre dos, luego escribimos los naturales divididos entre tres y así sucesivamente. Luego tomaremos la numeración en diagonal, cada diagonal se tomará de izquierda a derecha, de tal forma que se termina con cada uno de los elementos de \mathbb{Q}^+ (véase figura 3). Hay que resaltar que en el orden que dimos para los racionales hay números que aparecen más de una vez (por ejemplo, $0/1=0/2$), pero podemos simplemente saltarlos. De lo anterior podemos concluir que \mathbb{Q}^+ es numerable. De modo que, como ya mencionamos, haciendo uso de la alternación de signos, se puede construir una numeración de todos los racionales.

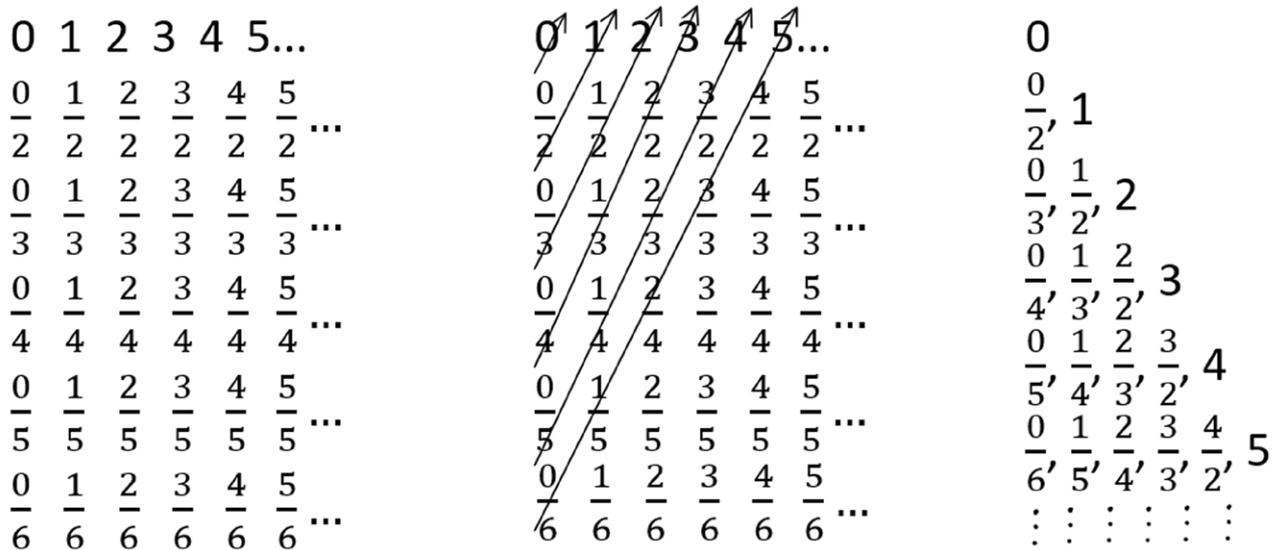


Figura 3. Numerabilidad de los racionales.

Así, a pesar de que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, los tres conjuntos son numerables, es decir, tienen la misma cardinalidad. ¿Será que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño?

INFINITOS MÁS GRANDES QUE OTROS

Después de saber que $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|$, resulta sorprendente descubrir que \mathbb{R} es más grande que \mathbb{N} . Mostraremos que existe $A \subset \mathbb{R}$ no numerable, y dado que hay una parte del conjunto de los reales que no es numerable, en general \mathbb{R} es no numerable. Consideraremos al conjunto $(0,1)$, el cual consta de todos los números reales entre cero y uno.

Si suponemos que $(0,1)$ es numerable, entonces podríamos enlistarlo, como lo muestra la figura 4 (la cual exhibe los primeros cinco números), donde el k -ésimo número real tiene expansión en decimales como se ve en la imagen. Ahora, por el supuesto, todos los números

reales deben estar en la lista. Denotamos al i -ésimo decimal del i -ésimo número real como $d_{i,i}$. Consideremos a un número real entre cero

y uno, $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_i}{10^{i+1}}$, donde elegiremos, para cada decimal i -ésimo D_i , cualquier número distinto de $d_{i,i}$. El número real x debería estar en la lista de los números reales, de modo que $x=n_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, o bien, x sería el k -ésimo número real, donde su k -ésimo decimal es $d_{k,k}$, pero el k -ésimo decimal de x es D_k , donde $D_k \neq d_{k,k}$, de modo que $n_k \neq x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $(0,1)$ no es numerable, de modo que \mathbb{R} no es numerable.

$n_1 \rightarrow 0.46578 \dots$	$n_1 \rightarrow 0.46578 \dots$
$n_2 \rightarrow 0.55241 \dots$	$n_2 \rightarrow 0.55241 \dots$
$n_3 \rightarrow 0.74027 \dots$	$n_3 \rightarrow 0.74027 \dots$
$n_4 \rightarrow 0.23879 \dots$	$n_4 \rightarrow 0.23879 \dots$
$n_5 \rightarrow 0.93625 \dots$	$n_5 \rightarrow 0.93625 \dots$

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_i}{10^{i+1}} = 0.57193 \dots$$

$d_{i,i} \neq D_i$

$$n_k \rightarrow 0 + \frac{d_{k,1}}{10} + \frac{d_{k,2}}{10^2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{k,i}}{10^{i+1}}$$

$$d_{j,i}, D_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Figura 4. Diagonal de Cantor.

La anterior prueba, que consistió en construir un número tomando decimales distintos a los de la diagonal de una hipotética lista de números reales, es comúnmente llamada *diagonal de Cantor*. La demostración de la no numerabilidad de \mathbb{R} fue formulada por primera vez por Georg Cantor en 1874, pero sería después cuando añadiría el argumento de la diagonal (véase Ferreirós (2008) para éste y otros detalles históricos de la teoría de conjuntos).

CONCLUSIÓN

Resulta que hay conjuntos infinitos de distintos tamaños. Expusimos aquí dos de estos “infinitos”, el infinito de \mathbb{N} y el de \mathbb{R} , pero hay incluso más, infinitos más (el lector puede investigar más en Gracián (2014), o aventurarse a un estudio formal de Hernández (1998) o Hrbacek y Jech (1999)).

La diferencia entre tamaños de dos conjuntos infinitos no está determinada por el que uno esté contenido en el otro, pues como pudimos ver $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|$.

Estos resultados pueden parecer contraintuitivos o paradójicos, pero en realidad son consecuencias de la definición precisa de conjunto infinito, una definición que nos demuestra el poder de las Matemáticas para dar luz a las ideas más desafiantes. El infinito no es inalcanzable para la razón humana, es un objeto matemático.

REFERENCIAS

- Hernández, F.H. (1998). *Teoría de conjuntos*. México: Sociedad Matemática Mexicana.
- Fresán, J. (2010). *El sueño de la razón: la lógica matemática y sus paradojas*. México: RBA Coleccionables.
- Gracián, E. (2014). *Un descubrimiento sin fin: el infinito matemático*. México: RBA Coleccionables.
- Hrbacek, K., y Jech, T. (1999). *Introduction to set theory, revised and expanded*. Nueva York: Crc Press.
- Ferreirós, J. (2008). *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Springer Science y Business Media.
- Jech, T. (2013). *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.
- Halmos, P. R. (2017). *Naive set theory*. Nueva York: Courier Dover Publications.